第 37 卷 第 1 期　　原 子 核 物 理 评 论　　Vol. 37, No. 1
2024 年 2 月　　Nuclear Physics Review　　Feb., 2024

文章编号： 1007-4627(2024) 01-0040-12

# 基于强子-夸克偶素模型和色磁相互作用口袋模型的奇异隐重味四夸克态质量谱

刘文念[1,2]，张文轩[2]，马爽文[1]，赵新军[1,2]，王利云[1]

(1. 伊犁师范大学物理科学与技术学院，新疆凝聚态相变与微结构实验室，新疆伊宁 835000；
2. 西北师范大学物理与电子工程学院，兰州 730070)

**摘要**：基于强子-夸克偶素模型和色磁相互作用口袋模型分别计算了含有奇异夸克的隐重味四夸克系统 $q\bar{s}Q\bar{Q}$ 和 $s\bar{s}Q\bar{Q}$ 的质量谱。强子-夸克偶素模型的计算结果表明当重夸克偶素 $Q\bar{Q}$ 处于激发态时, 奇异介子和 $Q\bar{Q}$ 之间的束缚能较大，可能会形成紧致的结构，因此实验上可以通过 $Q\bar{Q}$ 激发态至基态的衰变过程来识别。对于基态的奇异隐重味四夸克态，色磁相互作用口袋模型的计算结果支持紧致的四夸克态，尤其对实验上发现的 $Z_{cs}(4000)$ 和 $Z_{cs}(4220)$，计算结果相差仅 20 MeV 左右，对 $s\bar{s}Q\bar{Q}$ 的质量计算结果和实验的部分结果也非常接近，据此我们支持含有奇异夸克的四夸克态可能具有更多紧致的结构。

**关键词**：强子-夸克偶素；色磁相互作用

**中图分类号**：O571.53　　**文献标志码**：A　　**DOI**：10.11804/NuclPhysRev.37.01.40

## 1 引言

在过去的二十年里人们观察到了许多奇特强子态被称为 XYZ 粒子，这些强子态不能用传统的重子或介子来解释，其中比较流行的解释是强子分子态 (Molecular States)、强子-夸克偶素 (Hadro-quarkonium, H-Q) 的束缚态、紧致的四夸克等[1-6]。强子分子态所给出的理论解释是由介子 $\bar{Q}q$(其中 $Q = c, b$；$q = u, d$) 与其反粒子 $Q\bar{q}$ 相互作用而形成的束缚态[7-9]。BESIII 于 2021 年发现了第一个具有奇异性的隐粲四夸克态 $Z_{cs}(3985)^-$，随后 LHCb 实验组在 $B^+ \to J/\psi\phi K^+$ 过程中发现含有一个奇异夸克的四夸克态 $Z_{cs}(4000)^+$ 和 $Z_{cs}(4220)^+$[10]。理论上对 $Z_{cs}(4000)^+$ 和 $Z_{cs}(4220)^+$ 的解释主要有强子分子态[5,11-12]、H-Q 的束缚态[13-14] 和紧致的四夸克态[15-17]。基于 $Z_{cs}(4000)^+$ 和 $Z_{cs}(4220)^+$ 阈值效应和味道特征的考虑，本文采用了 H-Q 束缚态模型和含有色磁相互作用的口袋模型分别对两个粒子的质量谱进行了理论计算。

对于紧致的四夸克态可以通过色磁相互作用 (Chromomagentic interaction, CMI) 的口袋模型[18-19](MIT bag) 来描述，其特点是不受夸克数目的限制，可以很好的描述多夸克态的基态；其基本原理是考虑强子球形口袋近似和夸克间的色磁相互作用，给出强子质量的表达式 $M(R)$，对 $M(R)$ 关于强子半径做变分得到强子质量的最优解和强子半径的期望值。H-Q 束缚态对于多夸克态的描述强依赖于所选择的轻强子的色电相互作用半径参数 $R_H$，由于实验上缺少有轻强子相互作用半径信息，因此本文将口袋模型得到的强子半径作为输入量在 H-Q 模型下计算了奇异四夸克态的质量谱。

本文第一部分介绍了 H-Q 理论模型以及考虑了重夸克极限下重夸克偶素 $Q\bar{Q}$ 的半径 $R_{Q\bar{Q}} \simeq 0$ 时的 H-Q 束缚态的质量谱；第二部分基于 CMI 的口袋模型计算了隐味的四夸克态质量谱和半径；第三部分考虑了非点结构的重夸克偶素对 H-Q 束缚态的影响。

## 2 四夸克态的 H-Q 模型和口袋模型

### 2.1 基于轻强子口袋半径的 H-Q 束缚态

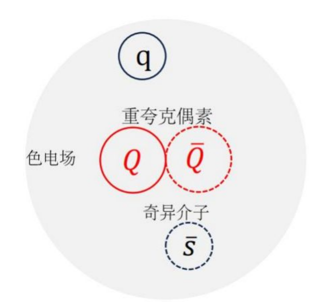



图 1　H-Q 束缚态示意图。

如图 1 所示，H-Q 束缚态是一个无色的重夸克偶素 $Q\bar{Q}$ 嵌入一个轻强子 ($qqq$ 或者 $q\bar{q}$) 之中，通过色电相互作

**收稿日期**：2024-02-07；　**修改日期**：2024-02-07
**基金项目**：伊犁师范大学校级一般项目（2022YSYB013）
**作者简介**：刘文念（1992-），男，甘肃省兰州市，讲师，硕士，理论物理；E-mail: 1169994277@qq.com
**通信作者**：E-mail: 1164509653@qq.com

用形成 H-Q 束缚态[20-21]。$Q\bar{Q}$ 与 $qqq$ 或 $q\bar{q}$ 之间的相互作用力是色电相互作用的范德华力[20]。这种相互作用可以用 QCD 的多级展开来描述[22-23]，如果将色电相互作用展开到领头阶，就可以得到有效的哈密顿量 $H_{eff}$[24-26]：

$$H_{eff} = -\frac{1}{2}\alpha_{\psi\psi'}\vec{E}\cdot\vec{E}', \quad (1)$$

公式 (1) 中 $\alpha_{\psi\psi'}$ 是重夸克偶素 $Q\bar{Q}$ 的色电极化率，$\vec{E}$ 为色电场[24]。为了计算出 H-Q 束缚态的质量，我们给出公式 (1) 在 $|H,Q\rangle$ 本征态中的形式。色电场的矩阵元可以写成一个能量动量张量：$\theta^{\mu}_{\mu} \approx \frac{9}{16\pi^2}E^2$。对于非相对论归一化轻强子 $|H\rangle$ 态的质量期望值 $M_H$ 可以表达为[24,26]：

$$M_H \simeq \langle H|\,\theta^{\mu}_{\mu}(q=0)\,|H\rangle, \quad (2)$$

$Q\bar{Q}$ 和 $qqq$ 或 $q\bar{q}$ 之间的相互作用可以近似为有效势 $V_{HQ}$，同时满足：

$$\int_0^{R_H} d^3rV_{HQ} \approx -\frac{8\pi^2}{9}\alpha_{\psi\psi'}M_H, \quad (3)$$

公式 (3) 中 $R_H$ 是轻强子的半径[26]，则有效势 $V_{HQ}$ 可以表示为[24]：

$$V_{HQ}(r) = \begin{cases} -\frac{2\pi\alpha_{\psi\psi'}M_H}{3R_H^3}, & for \quad r<R_H \\ 0, & for \quad r>R_H \end{cases}, \quad (4)$$

对于 H-Q 束缚态的哈密顿量为[24]：

$$H_{HQ} = M_{Q\bar{Q}} + M_H + V_{HQ}(r) + \frac{\nabla^2}{2\mu}, \quad (5)$$

公式 (5) 中 $M_{Q\bar{Q}}$ 为 $Q\bar{Q}$ 的质量，$\mu$ 为折合质量。最终的 H-Q 束缚态可表示为：

$$|\Phi_{HQ}\rangle = |(L_Q,S_Q)J_Q;(L_H,S_H)J_H;(J_{HQ},L_{HQ})J^p_{tot}\rangle \quad (6)$$

公式 (6) 满足角动量相加和宇称量子数相乘法则。其中 $L_Q$、$S_Q$ 和 $J_Q$ 分别为 $Q\bar{Q}$ 的轨道角动量、自旋角动量和总角动量；$L_H$、$S_H$ 和 $J_H$ 分别为 $qqq$ 或 $q\bar{q}$ 的轨道角动量、自旋角动量和总角动量；$J_{HQ}=J_H+J_Q$；$L_{HQ}$ 为 $Q\bar{Q}$ 和 $qqq$ 或 $q\bar{q}$ 的相对角动量；$J^p_{tot}$ 为 H-Q 束缚态的角动量和宇称。在我们的计算中没有考虑 $Q\bar{Q}$ 与 $qqq$ 或 $q\bar{q}$ 之间的相对轨道激发，因此令 $L_{HQ}=0$，这是因为在后面的计算中发现 $V_{HQ}$ 只能存在基态束缚。公式 (3) 的积分上限 $R_H$ 是 $Q\bar{Q}$ 嵌入 $qqq$ 或 $q\bar{q}$ 之后 H-Q 束缚态的半径的期望值。由于 $V_{HQ}$ 对 $R_H$ 的强烈依赖，这将对我们的计算的可靠性产生直接的影响。我们提供以下两种选择:

I. 在重夸克极限下 $R_H \gg R_Q$，即嵌入轻子的 $Q\bar{Q}$ 对轻子的半径的影响可以忽略不计。

II. 如果考虑 $Q\bar{Q}$ 的非点结构，则重夸克偶素半径 $R_Q$ 与 $R_H$ 相比不可忽略，所以必须考虑 $Q\bar{Q}$ 对轻子半径的影响，即考虑重夸克偶素嵌入后的束缚态半径。

对于基态轻介子的半径 $R_H$，我们考察了夸克势模型的方均根半径和口袋模型的变分结果。由于势模型的结果跨度较大[27-29]，我们选择了口袋模型的计算结果。口袋模型中强子的半径依据强子质量 $M(R)$ 的表达式关于强子半径 $R_H$ 变分运算得到的强子基态的半径，在该半径内包含了夸克间的相互作用，因此我们可以将其近似理解为 (3-4) 式所描述的轻强子相互作用边界。在表 1 中列举了 MIT 袋模型对轻强子质量和半径的计算结果[18,30]，其强子半径跨度较小。

**表 1　在 MIT 袋模型中，文献 [18] 和 [30] 计算得到的部分强子态质量 $M_{bag}$(单位：GeV) 及极限半径 $R_H$(单位:GeV$^{-1}$) 的结果，$M_{exp}$(单位：GeV) 为实验值**

| State | $R_H$ [30] | $M_{bag}$ [30] | $R_H$ [18] | $M_{bag}$ [18] | $M_{exp}$ [31] |
|---|---|---|---|---|---|
| $N$ | 5.00 | 0.938 | 5.22 | 0.932 | 0.939 |
| $\Delta$ | 5.48 | 1.233 | 5.33 | 1.241 | 1.232 |
| $\Lambda$ | 4.95 | 1.105 | 5.26 | 1.096 | 1.116 |
| $\Sigma$ | 4,95 | 1.144 | 5.22 | 1.137 | 1.193 |
| $\Xi$ | 4.91 | 1.289 | 5.27 | 1.282 | 1.318 |
| $\Sigma^*$ | 5.43 | 1.382 | 5.38 | 1.383 | 1.385 |
| $\Xi^*$ | 5.39 | 1.529 | 5.42 | 1.529 | 1.533 |
| $\Omega$ | 5.35 | 1,672 | 5.46 | 1.677 | 1.672 |
| $\pi$ | 3.34 | 0.280 | 4.31 | 0.348 | 0.137 |
| $\omega$ | 4.71 | 0.783 | 4.55 | 0.766 | 0.783 |
| $K$ | 3.26 | 0.497 | 4.34 | 0.561 | 0.496 |
| $K^*$ | 4.65 | 0.928 | 4.63 | 0.918 | 0.894 |
| $\phi$ | 4.61 | 1.068 | 4.70 | 1.064 | 1.019 |

在参考文献 [24] 中，通过强子-$J/\psi$ 的散射长度的结果给出了重夸克偶素极化率 $\alpha_{\psi\psi}$ 的相关参考值，在大-$N_c$ 极限下给出了色电极化率 $\alpha_{\psi\psi}$ 对量子数的依赖关系，$\alpha_{\psi\psi}(1S)/\alpha_{\psi\psi}(2S)=7/502$ 和文献 [32] 的取值接近[32]，因此在表 2 中我们参考文献 [24]，给出了相关色电极化率 $\alpha_{\psi\psi}$ 的取值。

强子半径参数的选取是表 1 中文献 [7] 由袋模型得到的介子的极限半径，令 $R_{bag}=R_H$，$R_\phi = 4.7GeV^{-1} \simeq 0.927fm$，$R_K = 4.34GeV^{-1} \simeq 0.856fm$，$R_{K^*} = 4.63GeV^{-1} \simeq 0.913fm$。求解 (5) 式的本征值得到束缚态的质量[33]。

在表 3 中列举了在 H-Q 模型下对 $c\bar{c}\otimes\phi$、$K$和$K^*$ 束缚态质量谱的计算结果，第四列为未考虑轻强子半径

表 2 参考文献 [24] 中给出的粲偶素 $\alpha_{\psi\psi}$ 和底偶素 $\alpha_{\Upsilon\Upsilon}$ 的色电极化率 (单位：GeV$^{-3}$)

| Polarizabilities | Value | Polarizabilities | Value |
|---|---|---|---|
| $\alpha_{\psi\psi}(1S)$ | $4.1GeV^{-3}$ | … | … |
| $\alpha_{\psi\psi}(1P)$ | $11GeV^{-3}$ | $\alpha_{\psi\psi}(2S)$ | $18GeV^{-3}$ |
| $\alpha_{\Upsilon\Upsilon}^{min}(1P)$ | $14GeV^{-3}$ | $\alpha_{\Upsilon\Upsilon}^{min}(2S)$ | $23GeV^{-3}$ |
| $\alpha_{\Upsilon\Upsilon}^{max}(1P)$ | $21GeV^{-3}$ | $\alpha_{\Upsilon\Upsilon}^{max}(2S)$ | $33GeV^{-3}$ |

膨胀的 H-Q 束缚态的质量。同时我们也试图构建 $c\bar{c}\otimes\pi$ 的结构，但是由 (4) 式描述的势阱太浅不能存在束缚态。在对 $c\bar{c}\otimes K^0$ 的计算中 $c\bar{c}$ 基态和 1P 态也不能形成相应的束缚态。第五列为未考虑轻强子半径膨胀的 H-Q 束缚态的束缚能 $\Delta E = M_H + M_Q - M_{HQ}$，$M_H$ 为相对应的介子质量，$M_Q$ 为相应粲偶素质量。结果表明在 $c\bar{c}$ 的角动量激发态 1P，当色电极化率取 $\alpha_{\psi\psi}(1P)_{c\bar{c}} = 11GeV^{-3}$ 时束缚能 $\Delta E$ 在 18 MeV-83 MeV，在 $c\bar{c}$ 的径向激发态 2S，当色电极化率取 $\alpha_{\psi\psi}(2S)_{c\bar{c}}$=18 Ge$V^{-3}$ 时所对应的束缚能 $\Delta E$ 在 $200MeV$ 左右。表 3 所示在 $c\bar{c}\otimes\phi$ 的质量在 4351 MeV-4501 MeV。由于模型的限制无法用 $c\bar{c}$ 和轻强子的自旋相互作用来修饰，但计算结果分别在 $m(\phi(1020)) + m(J/\psi)$=4117 MeV 和双介子 $2m(D_s)$=3936 MeV 阈值之上。实验上对于含有单个奇异夸克的四夸克态有态 $Z_{cs}(4000)$ 和 $Z_{cs}(4220)$ 其 $J^P$ 量子数为 $1^+$[10]，很可能与表 3 中计算值 $\psi(2S)\otimes K(4165)$ 和 $\eta_c(2S)\otimes K^*(4069)$ 相对应，这与实验结果接近，但是实验上缺少 $\psi(2S)$ 或 $\eta_c(2S)$ 衰变到基态的信息。

在表 4，5 中由于 $b\bar{b}$ 的色电极化率在参考文献 [24] 给出了不同的结果，这里分别对同一个束缚体系用了不同的色电极化率 $\alpha_{\Upsilon\Upsilon}^{min}$ 和 $\alpha_{\Upsilon\Upsilon}^{max}$ 进行了计算，结果显示相比 $c\bar{c}\otimes H$ 系统 $b\bar{b}\otimes H$ 会有更大的束缚能。

综上所述，H-Q 模型的计算结果虽然和实验结果 $Z_{cs}(4000)$ 和 $Z_{cs}(4220)$ 的质量较为接近，但是 H-Q 模型所预期的束缚态为 $c\bar{c}$ 激发态和介子所构成的束缚态，而实验上并没有发现 $c\bar{c}$ 的径向激发态至基态的衰变过程，因此对于该衰变过程可以作为束缚态存在的判据；其次对于含有两个奇异夸克的 $s\bar{s}\otimes Q\bar{Q}$ 束缚能会更大，有可能为紧致的四夸克态。在 H-Q 模型中我们用了 MIT 口袋半径，在 MIT 模型中夸克味道会影响到强子半径，一般规律是夸克越重强子半径越小，例如参考文献 [19] 中的结果，因此在 H-Q 模型中势阱宽度由于奇异夸克数目的增多而减小，造成束缚能的增大；另一方面是束缚势的表达式 (4) 式，其势阱的深度与轻强子的质量成正比，因此随着奇异夸克数目的增多势阱会变深，以上两方面都会造成束缚能变大。

## 2.2 CMI 口袋模型下的四夸克态半径及质量谱

MIT 袋模型给出了质量的表达式：

$$M(R) = \sum_{i=n,s,c,b}\omega_i + \frac{4}{3}\pi R^3 B - \frac{Z_0}{R} + \langle\Delta H\rangle, \quad (7)$$

$$\omega_i = (m_i^2 + \frac{x_i^2}{R^2})^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

公式 (7) 的第一项是相对论动能项的总和，$\omega_i$ 是价夸克动能；第二项是 MIT 袋的体积能量，其中参数 B 是袋内外真空能量密度差 (这与 H-Q 模型对轻强子质量的描述类似)，R 为球形口袋模型的半径；第三项是真空中的零点能量，其中 $Z_0$ 为零点能参数，可以参考文献 [18]，$\langle\Delta H\rangle$ 是夸克之间的相互作用能。公式（8）中的 $x_i^2/R^2$ 是动量的平方项。

通过夸克波函数在袋边界满足的边界条件得到如下超越方程:

$$\tan x_i = \frac{x_i}{1 - m_i R - (m_i^2R^2 + x_i^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad (9)$$

在 MIT 袋模型下，价夸克之间的相互作用能 $\Delta H$ 有两种形式：一种是夸克间色磁相互作用；另外一种是重夸克之间的短程相互作用 $H_{BE}$[18,34]。

$$H_{CMI} = -\sum_{i<j}(\lambda_i\cdot\lambda_j)(\sigma_i\cdot\sigma_j)C_{ij}, \quad (10)$$

$$\Delta H = H_{CMI} + H_{BE}, \quad (11)$$

$$H_{BE} = \sum_{i<j}(\lambda_i\cdot\lambda_j)\frac{\alpha_s(R)}{R}E_{ij}, \quad (12)$$

公式 (8) 至 (10) 中的 i 和 j 表示强子中夸克指标，$\lambda$ 为盖尔曼矩阵，$\sigma$ 为泡利矩阵。它们在算符形式下分别表示颜色因子和自旋因子，表示如下:

$$\langle\lambda_i\cdot\lambda_j\rangle_{nm} = \sum_{\alpha=1}^{8}T_r(c_{in}^\dagger\lambda^\alpha c_{im})T_r(c_{jn}^\dagger\lambda^\alpha c_{jm}), \quad (13)$$

$$\langle\sigma_i\cdot\sigma_j\rangle_{xy} = \sum_{\alpha=1}^{3}T_r(x_{ix}^\dagger\sigma^\alpha x_{ix})T_r(x_{jx}^\dagger\sigma^\alpha x_{jx}), \quad (14)$$

其中下角标 n、m、x 和 y 分别表示强子的颜色波函数基矢和自旋波函数基矢；c 和 $\chi$ 表示夸克的颜色和自旋基矢。上述方程的计算依赖于色自旋波函数由文献 [18] 给出。公式 (10) 中色磁相互作用参数 $C_{ij}$ 在 MIT 袋模型下可以表示为：

$$C_{ij} = 3\frac{\alpha_s(R)}{R^3}\bar{\mu}_i\bar{\mu}_j I_{ij}, \quad (15)$$

其中 $\alpha_s(R)$ 为跑动耦合常数由文献 [18] 给出，$\bar{\mu}_i$ 为第 $i$

表 3　H-Q 模型下的 $c\bar{c}$ 与相应介子束缚态的质量谱，第二列为 $J^P$ 量子数，第三列为色电极化率 (单位:$GeV^{-3}$)，第四列为未考虑轻强子半径膨胀的 $H-Q$ 束缚态的质量谱 (单位:GeV)，第五列为 $M_1$ 对应的束缚能 (单位:MeV)，第六列为考虑轻强子半径膨胀的 $H-Q$ 束缚态质量谱 (单位:GeV)，第七列为 $M_2$ 对应的束缚能 (单位:MeV)

| State | $J^P$ | $\alpha_{\psi\psi}$ | $M_1$ | $\Delta E_1$ | $M_2$ | $\Delta E_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\chi_{C0}(1P)\otimes\phi$ | $1^-$ | 11 | 4352 | −83 | 4380 | −54 |
| $\eta_c(2S)\otimes\phi$ | $1^+$ | 18 | 4453 | −204 | 4639 | −138 |
| $\chi_{C1}(1P)\otimes\phi$ | $0^-,1^-,2^-$ | 11 | 4447 | −84 | 4476 | −54 |
| $\chi_{C2}(1P)\otimes\phi$ | $1^-,2^-,3^-$ | 11 | 4492 | −84 | 4522 | −54 |
| $\psi(2S)\otimes\phi$ | $0^+,1^+,2^+$ | 18 | 4501 | −205 | 4567 | −139 |
| $\eta_c(2S)\otimes K$ | $0^+$ | 18 | 4110 | −18 | ··· | ··· |
| $\psi(2S)\otimes K$ | $1^+$ | 18 | 4165 | −18 | ··· | ··· |
| $\chi_{C0}(1P)\otimes K^*$ | $1^-$ | 11 | 4250 | −58 | 4270 | −38 |
| $\eta_c(2S)\otimes K^*$ | $1^+$ | 18 | 4069 | −162 | 4119 | −112 |
| $\chi_{C1}(1P)\otimes K^*$ | $0^-,1^-,2^-$ | 11 | 4346 | −58 | 4366 | −38 |
| $\chi_{C2}(1P)\otimes K^*$ | $1^-,2^-,3^-$ | 11 | 4392 | −58 | 4412 | −38 |
| $\psi(2S)\otimes K^*$ | $0^+,1^+,2^+$ | 18 | 4418 | −162 | 4468 | −112 |

表 4　H-Q 模型下的 $b\bar{b}$ 与相应介子束缚态的质量谱，第二列为 $J^P$ 量子数，第三列为色电极化率 (单位:$GeV^{-3}$)，第四列为未考虑轻强子半径膨胀的 $H-Q$ 束缚态的质量谱 (单位:GeV)，第五列为 $M_1$ 对应的束缚能 (单位:MeV)，第六列为考虑轻强子半径膨胀的 $H-Q$ 束缚态质量谱 (单位:GeV)，第七列为 $M_2$ 对应的束缚能 (单位:MeV)

| State | $J^P$ | $\alpha_{\psi\psi}$ | $M_1$ | $\Delta E_1$ | $M_2$ | $\Delta E_1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\chi_{b0}(1P)\otimes\phi$ | $1^-$ | 14 | 10729 | 150 | 10746 | 133 |
| $\chi_{b0}(1P)\otimes\phi$ | $1^-$ | 21 | 10601 | 278 | 10654 | 225 |
| $\eta_b(2S)\otimes\phi$ | $1^+$ | 23 | 10703 | 316 | 10735 | 284 |
| $\eta_b(2S)\otimes\phi$ | $1^+$ | 33 | 10509 | 510 | 10558 | 461 |
| $\chi_{b1}(1P)\otimes\phi$ | $0^-,1^-,2^-$ | 14 | 10762 | 150 | 10780 | 132 |
| $\chi_{b1}(1P)\otimes\phi$ | $0^-,1^-,2^-$ | 21 | 10634 | 278 | 10687 | 225 |
| $\chi_{b2}(1P)\otimes\phi$ | $1^-,2^-,3^-$ | 14 | 11136 | 152 | 11154 | 134 |
| $\chi_{b2}(1P)\otimes\phi$ | $1^-,2^-,3^-$ | 21 | 11009 | 279 | 11062 | 226 |
| $\Upsilon(2S)\otimes\phi$ | $0^+$，$1^+$，$2^+$ | 23 | 10727 | 316 | 10759 | 284 |
| $\Upsilon(2S)\otimes\phi$ | $0^+$，$1^+$，$2^+$ | 33 | 10533 | 510 | 10582 | 461 |
| $h_b(1P)\otimes\phi$ | $0^-,1^-,2^-$ | 14 | 10769 | 150 | 10787 | 132 |
| $h_b(1P)\otimes\phi$ | $0^-,1^-,2^-$ | 21 | 10641 | 278 | 10694 | 225 |

表 5 H-Q 模型下的 $b\bar{b}$ 与相应介子束缚态的质量谱，第二列为 $J^P$ 量子数，第三列为色电极化率 (单位:$GeV^{-3}$)，第四列为未考虑轻强子半径膨胀的 $H-Q$ 束缚态的质量谱 (单位:GeV)，第五列为 $M_1$ 对应的束缚能 (单位:MeV)，第六列为考虑轻强子半径膨胀的 $H-Q$ 束缚态质量谱 (单位:GeV)，第七列为 $M_2$ 对应的束缚能 (单位:MeV)

| State | $J^P$ | $\alpha_{\psi\psi}$ | $M_1$ | $\Delta E_1$ | $M_2$ | $\Delta E_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\eta_b(2S)\otimes K^0$ | $0^+$ | 23 | 10437 | 58 | 10474 | 21 |
| $\eta_b(2S)\otimes K^0$ | $0^+$ | 33 | 10350 | 145 | 10405 | 90 |
| $\Upsilon(2S)\otimes K^0$ | $0^+,1^+,2^+$ | 23 | 10461 | 58 | 10498 | 21 |
| $\Upsilon(2S)\otimes K^0$ | $0^+,1^+,2^+$ | 33 | 10374 | 145 | 10429 | 90 |
| $\chi_{b0}(1P)\otimes K^*$ | $1^-,2^-$ | 14 | 10639 | 114 | 10657 | 96 |
| $\chi_{b0}(1P)\otimes K^*$ | $1^-,2^-$ | 21 | 10526 | 227 | 10560 | 193 |
| $\eta_b(2S)\otimes K^*$ | $1^+$ | 23 | 10632 | 261 | 10671 | 222 |
| $\eta_b(2S)\otimes K^*$ | $1^+$ | 33 | 10458 | 435 | 10502 | 373 |
| $\chi_{b1}(1P)\otimes K^*$ | $0^-,1^-,2^-$ | 14 | 10672 | 114 | 10690 | 96 |
| $\chi_{b1}(1P)\otimes K^*$ | $0^-,1^-,2^-$ | 21 | 10558 | 228 | 10592 | 194 |
| $\chi_{b2}(1P)\otimes K^*$ | $0^-,1^-,2^-,3^-$ | 14 | 10692 | 114 | 10710 | 96 |
| $\chi_{b2}(1P)\otimes K^*$ | $0^-,1^-,2^-,3^-$ | 21 | 10579 | 227 | 10613 | 193 |
| $\Upsilon(2S)\otimes K^*$ | $0^+,1^+,2^+$ | 23 | 10656 | 261 | 10695 | 222 |
| $\Upsilon(2S)\otimes K^*$ | $0^+,1^+,2^+$ | 33 | 10483 | 434 | 10544 | 373 |
| $h_b(1P)\otimes K^*$ | $0^-,1^-,2^-$ | 14 | 10679 | 114 | 10697 | 96 |
| $h_b(1P)\otimes K^*$ | $0^-,1^-,2^-$ | 21 | 10565 | 228 | 10599 | 194 |

个夸克的磁矩，

$$\alpha_s(R)=\frac{0.296}{ln\left[1+(0.281R)^{-1}\right]}. \tag{16}$$

$$\bar{\mu}_i=\frac{R}{6}\frac{4\omega_i R+2\lambda_i-3}{2\omega_i R\left(\omega_i R-1\right)+\lambda_i}, \tag{17}$$

$$I_{ij}=1+2\int_0^R\frac{dr}{r^4}\bar{\mu}_i\bar{\mu}_j=1+F\left(x_i,x_j\right). \tag{18}$$

(18) 式为关于参数 $x_i$ 和 $x_j$ 的有理函数，其中 $F(x_i,x_j)$ 如下式：

$$\begin{aligned}F\left(x_i,x_j\right)=&\left(x_i\sin^2x_i-\frac{3}{2}y_i\right)^{-1}\left(x_j\sin^2x_j-\frac{3}{2}y_j\right)^{-1}\\&\left\{-\frac{3}{2}y_iy_j-2x_ix_jsin^2x_isin^2x_j+\frac{1}{2}x_ix_j\left[2x_iSi\left(2x_i\right)\right.\right.\\&+2x_jSi\left(2x_j\right)-\left(x_i+x_j\right)Si\left(2\left(x_i+x_j\right)\right)\\&\left.\left.-\left(x_i-x_j\right)Si\left(2\left(x_i-x_j\right)\right)\right]\right\}\end{aligned} \tag{19}$$

其中 $y_i=x_i-\cos\left(x_i\right)\sin\left(x_i\right)$，$x_i$ 为 (9) 式超越方程的解，其中：

$$Si(x)=\int_0^x\frac{\sin(t)}{t}dt. \tag{20}$$

夸克之间的色磁相互作用可以由公式 (10) 和 (11) 关于强子的色自旋波函数构造，并且能够给出强子输出质量的完整表达式。我们使强子的质量取关于强子半径 R 变分的最优解，以便于获得稳定强子态的质量和半径。

口袋模型的输入参数参考文献 [18-19]。$B$ 为体积能参数，$B_{c\bar{s}}$、$B_{b\bar{s}}$、$B_{b\bar{s}}$ 和 $B_{b\bar{b}}$, 是短程束缚能，是由对矢量介子进行拟合得到的。

$$\left\{\begin{matrix}Z_0=1.83, & B^{1/4}=0.145\,\text{GeV},\\ m_n=0\,\text{GeV}, & m_s=0.279\,\text{GeV},\\ m_c=1.641\,\text{GeV}, & m_b=5.093\,\text{GeV}.\end{matrix}\right\} \tag{21}$$

$$\left\{\begin{matrix}B_{cs}=-0.025\,\text{GeV}, & B_{cc}=-0.077\,\text{GeV},\\ B_{bs}=-0.032\,\text{GeV}, & B_{bb}=-0.128\,\text{GeV},\\ B_{bc}=-0.101\,\text{GeV}, & \end{matrix}\right\} \tag{22}$$

表 6 口袋模型对双重味基态介子的质量和极限半径的计算结果参考文献 [19]

| State | $R(\text{GeV}^{-1})$ | $M$(GeV) | $M_{(exp)}$(GeV) |
|---|---|---|---|
| $\eta_c$ | 3.03 | 2.994 | 2.984 |
| $\eta_b$ | 1.43 | 9.380 | 9.399 |
| $J/\psi$ | 3.54 | 3.095 | 3.097 |
| $\Upsilon$ | 1.80 | 9.459 | 9.460 |

$\phi_1^T$ 和 $\phi_2^T$ 分别对应隐味的四夸克态 $q_1q_2\bar{q}_3\bar{q}_4$ 在颜色空间中有两种颜色状态 $6\otimes\bar{6}$ 和 $3\otimes\bar{3}$，波函数为：

$$\phi_1^T=\left|(q_1q_2)^6(\bar{q}_3\bar{q}_4)^{\bar{6}}\right\rangle,\quad \phi_2^T=\left|(q_1q_2)^{\bar{3}}(\bar{q}_3\bar{q}_4)^3\right\rangle, \tag{23}$$

根据颜色所满足的 $SU_{(3)}$ 对称，可以给出波函数的两种具体表达形式，参考附录 A。在自旋空间有六种相应的四夸克自旋状态 (状态波函数下标表示自旋量子数)：

$$\begin{aligned}\chi_1^T&=\left|(q_1q_2)_1(\bar{q}_3\bar{q}_4)_1\right\rangle_2, & \chi_2^T&=\left|(q_1q_2)_1(\bar{q}_3\bar{q}_4)_1\right\rangle_1,\\ \chi_3^T&=\left|(q_1q_2)_1(\bar{q}_3\bar{q}_4)_1\right\rangle_0, & \chi_4^T&=\left|(q_1q_2)_1(\bar{q}_3\bar{q}_4)_0\right\rangle_1,\\ \chi_5^T&=\left|(q_1q_2)_0(\bar{q}_3\bar{q}_4)_1\right\rangle_1, & \chi_6^T&=\left|(q_1q_2)_0(\bar{q}_3\bar{q}_4)_0\right\rangle_0.\end{aligned} \tag{24}$$

我们将颜色-自旋 $\phi_i\chi_i$(由附录 A 给出) 作为对四夸克态描述的基矢会出现色磁混合，对角化后就可以得到四夸克色磁相互作用对 $\Delta H$ 的能量贡献。

**表 7　实验上发现的 $q\bar{s}c\bar{c}$ 和 $s\bar{s}c\bar{c}$ 的四夸克态**

| State | $J^P$ | $M$(MeV) | Decay modes |
|---|---|---|---|
| $Z_{cs}(4000)^+$ | $1^+$ | $3988^{+5}_{-5}$ | $J/\psi K^+, D_S^+\bar{D}^{*0}$ |
| $Z_{cs}(4220)^+$ | $1^+$ | $4216^{+24}_{-24}$ | $J/\psi K^+$ |
| $X(4350)$ | $?^{?+}$ | $4350^{+4.6}_{-5.1}$ | $J/\psi\phi, \gamma\gamma$ |
| $X(4500)$ | $0^{++}$ | $4506^{+11}_{-11}$ | $J/\psi\phi$ |
| $X(4630)$ | $?^{?+}$ | $4626^{+16}_{-16}$ | $J/\psi\phi$ |

如表 8 和图 2 所示，CMI 口袋模型对 $q\bar{s}c\bar{c}$ 或 $\bar{q}sc\bar{c}$ 的计算结果均显在 $J/\psi K^+(3593)$ 和 $D_S^+\bar{D}^0(3832)$ 阈上，强子平均半径为 5.22 GeV$^{-1}$(1.03fm)，其量子数为 $1^+$ 的计算结果在 3986 MeV-4325 MeV 之间，其中计算结果 3986 MeV 和 4208 MeV 与 $Z_{cs}(4000)$ 和 $Z_{cs}(4220)$ 的实验结果相差不到 20 MeV，据此我们支持 $Z_{cs}(4000)$ 和 $Z_{cs}(4220)$ 为紧致的四夸克态候选者。

如表 11 和图 2 所示，对 $c\bar{c}s\bar{s}$ 系统和 $0^{++}$ 的计算结果在 $2D_S(3936)$ 介子的阈值上 180 MeV 乃至更大。同时 $0^{++}$ 和其它量子数的计算结果几乎都在 $J/\psi\phi(4117)$ 阈上，只有 $0^{++}$ 的最小计算值 4099 MeV 在 $J/\psi\phi(4117)$ 阈值之下，但束缚能只有 20 MeV 左右。对于 $1^{+-}$ 和 $1^{++}$ 的计算结果在 $D_sD_{s1}^*(4748)$ 阈上或阈下都有分布，但是阈值下的结果束缚能接近 100 MeV，可能接近分子态束缚能的极限。对于 $2^{++}$ 的计算结果均在 $2D_{s1}^*(5560)$ 阈值下并且较大。

对于实验上的结果 $X(4630)$ 对 $\bar{D}_sD_{s1}^*(4748)$ 的分子态解释需要超过-118 MeV 的束缚能，$X(4500)$ 和 $X(4350)$ 的束缚能将更大，对此我们支持 $X(4350)$，$X(4500)$ 和 $X(4630)$ 可能为紧致的四夸克态。

对比表 8 和表 11 的强子半径的计算结果发现，由于动能的抑制 $c\bar{c}s\bar{s}$ 的极限半径比 $q\bar{s}c\bar{c}$ 更小，据此我们有以下推论，如果 $Z_{cs}(4000)$ 和 $Z_{cs}(4220)$ 是紧致的四夸克态，那么对于 $c\bar{c}s\bar{s}$ 体系除了分子态，出现紧致四夸克态的可能性将更大。

如表 10、13 和图 2 所示，我们在 CMI 袋模型下计算了 $q\bar{s}b\bar{b}$，$\bar{q}sb\bar{b}$ 和 $s\bar{s}b\bar{b}$ 系统，对 $s\bar{s}b\bar{b}$ 的系统我们的结果在 $B_s^*B_s^*$ 阈上，并且强子半径相比 $s\bar{s}c\bar{c}$ 更小。因此也期待 $q\bar{s}b\bar{b}$,$\bar{q}sb\bar{b}$ 和 $s\bar{s}b\bar{b}$ 系统可能会出现更多紧致的四夸克态。

表 9 和表 12 给出了将强子本征态变换到 $8\otimes\bar{8}$ 和 $\bar{1}\otimes 1$ 对 $q\bar{s}c\bar{c}$ 和 $s\bar{s}c\bar{c}$ 系统的衰变分支之比的计算结果。在计算四夸克态衰变研究前，先将其中的散射态去掉。这里我们需要通过表象变换使介子色单态与介子色单态耦合，介子色八重态与介子色八重态耦合两种颜色-自旋波函数形式。对于不同构型的颜色-自旋波函数结构，只有以色单态耦合的结构会发生衰变，它们会直接解离为自旋为 $s_1$ 与 $s_2$ 的介子，而八重态不会发生这种情况。当色单态特征矢量满足 $|c_1|^2\geqslant 0.8$ 这一条件时就可以判定为散射态，这样的态我们就都要将其排除掉，对于四夸克态中的八重态，当交换夸克时会使其转变为色单态也会发生衰变，也是需要去讨论的。在完成对于散射态的排除工作后就可以进行衰变道研究，这里我们只研究它的 $A\longrightarrow B+C$ 模式的两体衰变。对于两体衰变，可以给出相应的特征矢量所对应的衰变道的部分衰变宽度公式[36]:

$$\Gamma_i=\gamma_i\alpha\frac{k^{2L+1}}{m_a^{2L}}\cdot|c_i|^2 \tag{25}$$

这里的 $\Gamma_i$ 为衰变道 i 的部分衰变宽度，$\gamma_i$ 为衰变系数,$\alpha$ 为耦合常数,$m_a$ 为衰变前粒子的质量，$c_i$ 为四夸克态与色单态耦合时相应的特征矢量。式中的 L 为轨道角动量，因为我们这里只研究基态, 因此取 L=0。k 为衰变产物的动量，我们将衰变体系选在零动量参考系中，对于该参考系中衰变发生后的两个粒子产物具有相同的动量 k，可以通过下面的式子将衰变产物的动量 k 求解出来，式中的 $m_b$ 与 $m_c$ 为衰变产物中的介子的质量。

$$m_a=\sqrt{m_b^2+k^2}+\sqrt{m_c^2+k^2} \tag{26}$$

通过以上的计算，我们将每个四夸克态各衰变道的衰变宽度分支比求解了出来，选取其中衰变宽度分支比最大的作为参考标准，与其它做比，最终得到各衰变道的相对衰变宽度分支比，可以很明显的对比并分析出各道衰变时的主导情况。

### 2.3　基于多夸克强子态半径下的 H-Q 束缚态

考虑非点结构的 $Q\bar{Q}$ 介子嵌入强子内部可能会引起轻强子的极限半径会发生变化，这会对 H-Q 模型的束缚能有影响。公式 (4) 中由于束缚势是与 $1/R_H^3$ 成反比，因

表 8　基于 CMI 袋模型 ($q\bar{s}c\bar{c}$) 或 ($\bar{q}sc\bar{c}$) 的质量谱，其中 $R$ 为四夸克态半径的期望值，$M$ 为质量，第四列为色磁混合下的质量本征态，第五列为文献 [35] 的计算结果，第六列为实验上所对应的态，参考表 7

| $J^P$ | $R(\text{GeV}^{-1})$ | $M$(MeV) | Eigenvector | ICMI[35] | ExP |
|---|---|---|---|---|---|
| $0^+$ | 5.13 | 3923 | $0.223\phi_2\chi_3+0.469\phi_2\chi_6-0.834\phi_1\chi_3-0.186\phi_1\chi_6$ | 3455 | - |
| | 5.26 | 4111 | $0.725\phi_2\chi_3-0.244\phi_2\chi_6+0.193\phi_1\chi_3-0.614\phi_1\chi_6$ | 3857 | - |
| | 5.27 | 4252 | $0.146\phi_2\chi_3+0.845\phi_2\chi_6+0.514\phi_1\chi_3-0.002\phi_1\chi_6$ | 4078 | - |
| | 5.32 | 4374 | $0.635\phi_2\chi_3-0.08\phi_2\chi_6-0.046\phi_1\chi_3-0.767\phi_1\chi_6$ | 4220 | - |
| $1^+$ | 5.21 | 3986 | $0.26\phi_2\chi_2-0.31\phi_2\chi_4+0.31\phi_2\chi_5-0.68\phi_1\chi_2+0.36\phi_1\chi_4-0.37\phi_1\chi_5$ | 3575 | $Z_{cs}(4000)^+$ |
| | 5.30 | 4163 | $-0.16\phi_2\chi_2-0.45\phi_2\chi_4-0.56\phi_2\chi_5-0.17\phi_1\chi_2-0.53\phi_1\chi_4-0.39\phi_1\chi_5$ | 3846 | - |
| | 5.14 | 4208 | $-0.58\phi_2\chi_2+0.27\phi_2\chi_4+0.025\phi_2\chi_5-0.63\phi_1\chi_2-0.16\phi_1\chi_4-0.39\phi_1\chi_5$ | 3923 | $Z_{cs}(4220)^+$ |
| | 5.36 | 4276 | $0.42\phi_2\chi_2+0.57\phi_2\chi_4-0.63\phi_2\chi_5-0.25\phi_1\chi_2+0.19\phi_1\chi_4-0.065\phi_1\chi_5$ | 4105 | - |
| | 5.22 | 4319 | $0.63\phi_2\chi_2-0.062\phi_2\chi_4+0.21\phi_2\chi_5-0.18\phi_1\chi_2-0.60\phi_1\chi_4+0.41\phi_1\chi_5$ | 4133 | - |
| | 5.41 | 4325 | $-0.056\phi_2\chi_2+0.54\phi_2\chi_4+0.39\phi_2\chi_5+0.023\phi_1\chi_2-0.41\phi_1\chi_4-0.62\phi_1\chi_5$ | 4203 | - |
| $2^+$ | 5.39 | 4286 | $-0.465\phi_2\chi_1+0.885\phi_1\chi_1$ | 3967 | - |
| | 5.42 | 4331 | $-0.885\phi_2\chi_1+0.465\phi_1\chi_1$ | 4209 | - |

表 9　将强子本征态变换到 $8\otimes\bar{8}$ 和 $\bar{1}\otimes 1$ 对 $q\bar{s}c\bar{c}$ 系统的衰变分支之比的计算结果，其中"$*$" 表示散射态，"-" 表示阈值禁止

| $State$ | $J^P$ | $Mass$ | $K^*J/\psi$ | $K^*\eta_c$ | $K^0J/\psi$ | $K^0\eta_c$ | $D_s^*D_0^*$ | $D_0^*D_s$ | $D_s^*D_0$ | $D_sD_0$ | Exp |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ($q\bar{s}c\bar{c}$) | $0^+$ | 3921 | $*$ | | | | 0 | | | 1 | |
| | | 4114 | 0.442 | | | 1 | $*$ | | | | |
| | | 4255 | 1 | | | 0.0124 | 1 | | | 0.2795 | |
| | | 4371 | 1 | | | 0.0063 | 1 | | | 0.0088 | |
| | $1^+$ | 3989 | - | 0, 00426 | 1 | | 1 | 0.0926 | 0.133 | | $Z_{cs}(4000)^+$ |
| | | 4167 | $*$ | | | | 0.00468 | 0.0015 | 1 | | |
| | | 4209 | 0.000365 | 0,0015 | 1 | | 0.0022 | 1 | 0.254 | | $Z_{cs}(4220)^+$ |
| | | 4278 | | 1 | | | 0.0875 | 0.0001 | 1 | | |
| | | 4323 | 1 | 0.5943 | 0.0805 | | 0.105 | 1 | 0.263 | | |
| | | 4326 | 0.0116 | 1 | 0, 03223 | | $*$ | | | | |
| | $2^+$ | 4286 | $*$ | | | | 1 | | | | |
| | | 4331 | 1 | | | | $*$ | | | | |

表 10　基于 CMI 袋模型 ($q\bar{s}b\bar{b}$) 或 ($\bar{q}sb\bar{b}$) 的质量谱，其中 $R$ 为四夸克态半径的期望值，$M$ 为质量，第四列为色磁混合下的质量本征态，第五列为文献 [35] 的计算结果，第六列为实验上所对应的态，参考表 7

| $J^P$ | $R(\text{GeV}^{-1})$ | $M$(MeV) | Eigenvector | ICMI[35] |
|---|---|---|---|---|
| $0^+$ | 4.67 | 10676 | $0.36\phi_2\chi_3+0.32\phi_2\chi_6-0.80\phi_1\chi_3-0.36\phi_1\chi_6$ | 9886 |
| | 4.68 | 10894 | $0.54\phi_2\chi_3-0.37\phi_2\chi_6+0.38\phi_1\chi_3-0.65\phi_1\chi_6$ | 10335 |
| | 4.84 | 10999 | $0.39\phi_2\chi_3+0.80\phi_2\chi_6+0.44\phi_1\chi_3-0.123\phi_1\chi_6$ | 10776 |
| | 4.86 | 11048 | $0.65\phi_2\chi_3-0.35\phi_2\chi_6-0.13\phi_1\chi_3+0.66\phi_1\chi_6$ | 10883 |
| $1^+$ | 4.88 | 10685 | $-0.31\phi_2\chi_2+0.26\phi_2\chi_4-0.26\phi_2\chi_5+0.65\phi_1\chi_2-0.41\phi_1\chi_4+0.41\phi_1\chi_5$ | 9947 |
| | 4.74 | 10920 | $0.11\phi_2\chi_2+0.43\phi_2\chi_4+0.42\phi_2\chi_5+0.13\phi_1\chi_2+0.62\phi_1\chi_4+0.49\phi_1\chi_5$ | 10280 |
| | 4.88 | 10940 | $-0.52\phi_2\chi_2-0.03\phi_2\chi_4+0.20\phi_2\chi_5-0.63\phi_1\chi_2-0.27\phi_1\chi_4+0.47\phi_1\chi_5$ | 10338 |
| | 4.87 | 11004 | $-0.31\phi_2\chi_2+0.57\phi_2\chi_4-0.59\phi_2\chi_5-0.27\phi_1\chi_2+0.31\phi_1\chi_4-0.24\phi_1\chi_5$ | 10803 |
| | 4.98 | 11039 | $0.451\phi_2\chi_2-0.28\phi_2\chi_4-0.59\phi_2\chi_5-0.19\phi_1\chi_2+0.11\phi_1\chi_4+0.55\phi_1\chi_5$ | 10827 |
| | 4.85 | 11040 | $0.56\phi_2\chi_2+0.59\phi_2\chi_4+0.12\phi_2\chi_5-0.24\phi_1\chi_2-0.52\phi_1\chi_4-0.02\phi_1\chi_5$ | 10874 |
| $2^+$ | 4.97 | 10963 | $-0.465\phi_2\chi_1+0.885\phi_1\chi_1$ | 10342 |
| | 4.99 | 11047 | $-0.885\phi_2\chi_1+0.465\phi_1\chi_1$ | 10847 |

表 11　基于 CMI 袋模型 $(c\bar{c}s\bar{s})$ 的质量谱，其中 $R$ 为四夸克态半径的期望值，$M$ 为质量，第四列为色磁混合下的质量本征态，第五列为文献 [35] 的计算结果

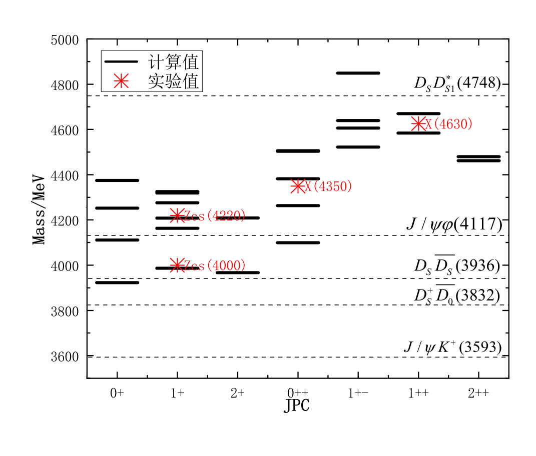
| $J^{PC}$ | $R(\mathrm{GeV}^{-1})$ | $M(\mathrm{MeV})$ | Eigenvector | ICMI[35] | ExP |
|---|---|---|---|---|---|
| $0^{++}$ | 4.70 | 4099 | $-0.18\phi_2\chi_3-0.51\phi_2\chi_1+0.83\phi_1\chi_3+0.14\phi_1\chi_6$ | 3739 | - |
| | 4.93 | 4263 | $-0.18\phi_2\chi_3-0.76\phi_2\chi_1-0.15\phi_1\chi_3+0.61\phi_1\chi_6$ | 3976 | - |
| | 5.11 | 4382 | $-0.12\phi_2\chi_3-0.84\phi_2\chi_1-0.54\phi_1\chi_3+0.01\phi_1\chi_6$ | 4195 | $X(4350)$ |
| | 5.33 | 4503 | $0.62\phi_2\chi_3-0.06\phi_2\chi_1-0.04\phi_1\chi_3+0.78\phi_1\chi_6$ | 4302 | $X(4500)$ |
| $1^{+-}$ | 5.21 | 4522 | $-0.33\phi_2\chi_2+0.57\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_2\chi_4-\phi_2\chi_5\right)+0.03\phi_1\chi_2+0.75\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1\chi_4-\phi_1\chi_5\right)$ | 3865 | - |
| | 5.30 | 4606 | $0.87\phi_2\chi_2+0.49\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_2\chi_4-\phi_2\chi_5\right)+0.08\phi_1\chi_2+0.02\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1\chi_4-\phi_1\chi_5\right)$ | 3975 | - |
| | 5.38 | 4639 | $0.18\phi_2\chi_2-0.46\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_2\chi_4-\phi_2\chi_5\right)+0.77\phi_1\chi_2+0.41\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1\chi_4-\phi_1\chi_5\right)$ | 4232 | $X(4630)$ |
| | 5.46 | 4849 | $0.32\phi_2\chi_2-0.47\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_2\chi_4-\phi_2\chi_5\right)-0.64\phi_1\chi_2+0.52\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1\chi_4-\phi_1\chi_5\right)$ | 4289 | - |
| $1^{++}$ | 5.22 | 4584 | $-0.58\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_2\chi_4+\phi_2\chi_5\right)+0.82\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1\chi_4+\phi_1\chi_5\right)$ | 4039 | - |
| | 5.41 | 4670 | $0.82\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_2\chi_4+\phi_2\chi_5\right)+0.58\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1\chi_4+\phi_1\chi_5\right)$ | 4215 | - |
| $2^{++}$ | 5.39 | 4462 | $0.55\phi_2\chi_1+0.83\phi_1\chi_1$ | 4092 | - |
| | 5.39 | 4480 | $-0.83\phi_2\chi_1+0.55\phi_1\chi_1$ | 4309 | - |

表 12　将强子本征态变换到 $8\otimes\bar{8}$ 和 $\bar{1}\otimes 1$ 对 $c\bar{s}s\bar{c}$ 系统的衰变分支之比的计算结果，其中"$*$" 表示散射态，"-" 表示阈值禁止

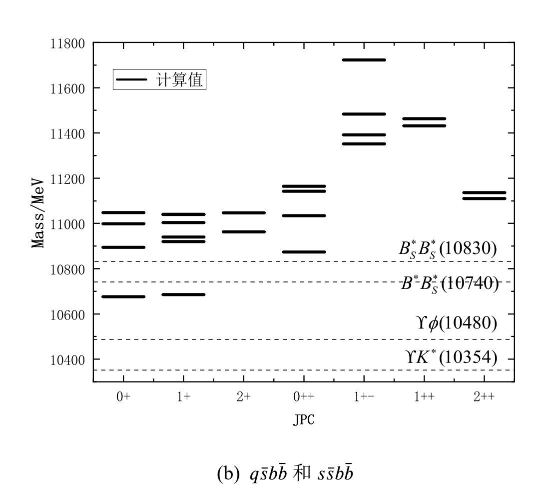
| $State$ | $J^P$ | $Mass$ | $D_s^*D_s^*$ | $D_s^*D_s$ | $D_sD_s^*$ | $D_sD_s$ | $J/\psi\phi$ | −− | $\eta_c\phi$ | −− | Exp |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(c\bar{s}s\bar{c})$ | $0^+$ | 4095 | - | | | 1 | $*$ | | | | |
| | | 4267 | 0.00312 | | | 1 | 1 | | 0 | | |
| | | 4380 | 0.0418 | | | 1 | 1 | | 0 | | $X(4350)$ |
| | | 4505 | 0.5832 | | | 1 | 1 | | 0 | | $X(4500)$ |
| | $1^+$ | 4518 | 0.000142 | | | | $*$ | | | | |
| | | 4599 | $*$ | | | | 0 | | 1 | | |
| | | 4641 | 0.0002216 | 1 | 1 | | 1 | | 0 | | $X(4630)$ |
| | | 4858 | 0.00043 | 1 | 1 | | $*$ | | | | |
| | | 4586 | 0.000318 | 1 | 1 | | 0 | | 1 | | |
| | | 4667 | $*$ | | | | | | | | |
| | $2^+$ | 4458 | 1 | | | | $*$ | | | | |
| | | 4482 | $*$ | | | | 1 | | 0 | | |

表 13　基于 CMI 袋模型 $(s\bar{s}b\bar{b})$ 的质量谱，其中 $R$ 为四夸克态半径的期望值，$M$ 为质量，第四列为色磁混合下的质量本征态，第五列为文献 [35] 的计算结果

| $J^{PC}$ | $R(\mathrm{GeV}^{-1})$ | $M(\mathrm{MeV})$ | Eigenvector | ICMI[35] |
|---|---|---|---|---|
| $0^{++}$ | 4.42 | 10874 | $-0.37\phi_2\chi_3-0.34\phi_2\chi_1+0.81\phi_1\chi_3+0.33\phi_1\chi_6$ | 10185 |
| | 4.61 | 11034 | $-0.56\phi_2\chi_3+0.38\phi_2\chi_1-0.39\phi_1\chi_3+0.61\phi_1\chi_6$ | 10460 |
| | 4.76 | 11142 | $0.35\phi_2\chi_3+0.83\phi_2\chi_1+0.45\phi_1\chi_3+0.09\phi_1\chi_6$ | 10864 |
| | 4, 86 | 11164 | $0.62\phi_2\chi_3-0.30\phi_2\chi_1-0.15\phi_1\chi_3+0.68\phi_1\chi_6$ | 10952 |
| $1^{+-}$ | 4.89 | 11352 | $-0.41\phi_2\chi_2+0.65\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_2\chi_4-\phi_2\chi_5\right)-0.24\phi_1\chi_2+0.59\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1\chi_4-\phi_1\chi_5\right)$ | 10246 |
| | 4.94 | 11392 | $0.76\phi_2\chi_2+0.37\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_2\chi_4-\phi_2\chi_5\right)+0.43\phi_1\chi_2+0.25\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1\chi_4-\phi_1\chi_5\right)$ | 10406 |
| | 4.90 | 11483 | $-0.31\phi_2\chi_2-0.46\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_2\chi_4-\phi_2\chi_5\right)+0.63\phi_1\chi_2+0.53\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1\chi_4-\phi_1\chi_5\right)$ | 10913 |
| | 4.95 | 11723 | $0.38\phi_2\chi_2-0.44\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_2\chi_4-\phi_2\chi_5\right)-0.59\phi_1\chi_2+0.55\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1\chi_4-\phi_1\chi_5\right)$ | 10945 |
| $1^{++}$ | 5.01 | 11432 | $0.82\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_2\chi_4+\phi_2\chi_5\right)+0.58\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1\chi_4+\phi_1\chi_5\right)$ | 10464 |
| | 4.87 | 11463 | $-0.58\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_2\chi_4+\phi_2\chi_5\right)+0.82\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1\chi_4+\phi_1\chi_5\right)$ | 10891 |
| $2^{++}$ | 4.98 | 11110 | $0.51\phi_2\chi_1+0.86\phi_1\chi_1$ | 10468 |
| | 4.98 | 11136 | $-0.86\phi_2\chi_1+0.51\phi_1\chi_1$ | 10937 |




(a) $q\bar{s}c\bar{c}$ 和 $s\bar{s}c\bar{c}$




(b) $q\bar{s}b\bar{b}$ 和 $s\bar{s}b\bar{b}$

图 2　横坐标为量子数，纵坐标为质量，黑色短线为计算值，黑色虚线为可能的阈，红色点为实验值

此束缚能与强子的半径是强依赖的，同时势阱的宽度与轻强子半径 $R_H$ 有关。由表 6 可知相比轻强子半径 $R_H$ 重夸克偶素的半径不可忽略，因此我们考虑了 $Q\bar{Q}$ 嵌入轻强子后，原来的轻强子对 $Q\bar{Q}$ 的束缚边界 $R_H$ 会膨胀，尤其对于粲偶素 $c\bar{c}$，在本文的 2.2 表 6 口袋模型得到 $J/\psi$ 和 $\eta_c$ 的半径期望值分别为 3.5 GeV$^{-1}$ 和 3.03GeV$^{-1}$ 相比轻强子的表 1 给出半径 $R_H \approx 4.5\text{GeV}^{-1}$。因此当 $Q\bar{Q}$ 嵌入轻强子这种束缚边界的变化也不能忽略，我们利用表 8 和表 10 中 CMI 口袋模型中的四夸克态半径的期望对 H-Q 模型的结果进行了修正。我们假设强子束缚势的边界 $R_H \approx R_T$($R_T$ 为袋模型下的四夸克态半径，由于袋模型下四夸克态的半径是 $J^P$ 量子数依赖的，但差别比较小如表 8、10、11、13 所示，因此在带入 H-Q 模型进行计算时取了平均 $R_{Hc\bar{c}} \approx 5.22\text{GeV}^{-1}$,$R_{Hb\bar{b}} \approx 4.85\text{GeV}^{-1}$)，对 (5) 式能量本征值进行了求解，结果如表 3、4 和 5 的第六、七列所示，分别给出了 H-Q 模型下束缚能和质量，结果显示对于非点结构的 $Q\bar{Q}$ 对轻介子的插入将会引起 H-Q 束缚态的束缚能降低。

## 3 结　论

在本文的第一部分我们在 H-Q 模型下计算了的 $q\bar{s}\otimes Q\bar{Q}$ 和 $q\bar{s}\otimes Q\bar{Q}$ 系统的束缚能和质量谱，结果显示如果将 $q\bar{s}\otimes Q\bar{Q}$ 作为 H-Q 束缚态，那么只有当在 $Q\bar{Q}$ 处于激发态时才能够形成束缚态。同时我们在 H-Q 模型下的计算结果表明的 $s\bar{s}\otimes Q\bar{Q}$ 的束缚能普遍要大于 $q\bar{s}\otimes Q\bar{Q}$ 的束缚能，对于隐粲味的部分结果和隐底味的束缚态可能形成深度束缚。对于实验上可能出现的 H-Q 束缚态候选者，可以通过对四夸克态的衰变产物中寻找 $Q\bar{Q}$ 激发态的产物来分辨。

在本文的第二部分我们基于 CMI 口袋模型计算了 $q\bar{s}Q\bar{Q}$ 和 $s\bar{s}Q\bar{Q}$ 的半径期望值和质量谱。对于含有奇异夸克的四夸克态，可能是在夸克自由度上存在更加复杂的颜色相互作用,CMI 口袋模型对于 $q\bar{s}Q\bar{Q}$ 和 $s\bar{s}Q\bar{Q}$ 的解释为色磁混合态。CMI 口袋模型对 $q\bar{s}c\bar{c}$ 系统的计算结果支持 $Z_{cs}(4000)$ 和 $Z_{cs}(4220)$ 可能为紧致的四夸克态，质量的计算值和 $Z_{cs}(4000)$ 和 $Z_{cs}(4220)$ 相差 20 MeV，半径在 5.22 GeV$^{-1}$(1.03fm) 左右。基于对 $s\bar{s}c\bar{c}$ 的计算结果我们支持部分实验上部分含有双奇异夸克的 X 态可能具有紧致的结构例如 X（4350）、X（4500）和 X（4630），质量的计算结果和实验值相差在 40 MeV 以内，其半径的期望值在 5.16 GeV$^{-1}$（1.02fm）左右。基于 CMI 口袋模型对 $q\bar{s}b\bar{b}$ 和 $s\bar{s}b\bar{b}$ 的质量谱和半径的期望值进行了预测，结果其半径更小在 4.85 GeV$^{-1}$(0.96fm) 左右。在表 8、10、11 和 13 中我们列举了文献 [35] 的质量计算结果，在传统的 CMI 框架下考虑了轻夸克色电相互作用（ICMI），其计算结果和 CMI 口袋模型的质量计算结果相比较小。

对比 H-Q 模型的计算结果我们发现其束缚能有这样的规律 $B_{q\bar{s}\otimes c\bar{c}} < B_{s\bar{s}\otimes c\bar{c}} < B_{q\bar{s}\otimes b\bar{b}} < B_{s\bar{s}\otimes b\bar{b}}$，CMI 口袋模型对半径的计算结果显示 $R_{q\bar{s}c\bar{c}} > R_{s\bar{s}c\bar{c}} > R_{q\bar{s}b\bar{b}} > R_{s\bar{s}b\bar{b}}$，这可能是由于味道的改变，动能的抑制使得四夸克体系更趋于紧致的结构。因此我们给出推论，如果 $Z_{cs}(4000)$ 和 $Z_{cs}(4220)$ 是紧致的结构那么 $s\bar{s}c\bar{c}$、$q\bar{s}b\bar{b}$、$s\bar{s}b\bar{b}$，除了分子态和其它束缚态，出现紧致的结构的可能性更大。

## 致谢

感谢西北师范大学贾多杰教授和高迪博士关于此工作的讨论。

## 附录 A1

对于隐味四夸克态，基于颜色的 $SU(3)$ 对称性我们可以给出两个色单态表示 $6\otimes\bar{6}$ 和 $\bar{3}\otimes 3$，因此对于颜色波函数我们可以表示为下式：

$$\begin{aligned}\phi_1^T =& \frac{1}{\sqrt{6}}\left(rr\bar{r}\bar{r}+gg\bar{g}\bar{g}+bb\bar{b}\bar{b}\right)\\ &+\frac{1}{2\sqrt{6}}\left(rb\bar{b}\bar{r}+br\bar{b}\bar{r}+gr\bar{g}\bar{r}+rg\bar{g}\bar{r}+gb\bar{b}\bar{g}+bg\bar{b}\bar{g}\right.\\ &\left.+gr\bar{r}\bar{g}+rg\bar{r}\bar{g}+gb\bar{g}\bar{b}+bg\bar{g}\bar{b}+rb\bar{r}\bar{b}+br\bar{r}\bar{b}\right),\end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned}\phi_2^T =& \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(rb\bar{b}\bar{r}-br\bar{b}\bar{r}-gr\bar{g}\bar{r}+rg\bar{g}\bar{r}+gb\bar{b}\bar{g}-bg\bar{b}\bar{g}\right.\\ &\left.+gr\bar{r}\bar{g}-rg\bar{r}\bar{g}-gb\bar{g}\bar{b}+bg\bar{g}\bar{b}-rb\bar{r}\bar{b}+br\bar{r}\bar{b}\right)\end{aligned} \quad (28)$$

对于四夸克的自旋基矢有六个：

$$\begin{aligned}\chi_1^T =& \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow,\\ \chi_2^T =& \frac{1}{2}(\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow+\uparrow\uparrow\downarrow\uparrow-\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow-\downarrow\uparrow\uparrow\uparrow),\\ \chi_3^T =& \frac{1}{\sqrt{3}}(\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow+\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow),\\ &-\frac{1}{2\sqrt{3}}(\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow+\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow+\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow+\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow),\\ \chi_4^T =& \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow-\uparrow\uparrow\downarrow\uparrow),\\ \chi_5^T =& \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow-\downarrow\uparrow\uparrow\uparrow),\\ \chi_6^T =& \frac{1}{2}(\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow-\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow-\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow+\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow),\end{aligned} \quad (29)$$

因此对于描述四夸克态的颜色自旋基矢考虑泡利原理应该有 12 个分别为：

$$\begin{aligned}\phi_1^T\chi_1^T =& \left|(q_1q_2)_1^6(\bar{q}_3\bar{q}_4)_1^{\bar{6}}\right\rangle_2\delta_{12}^A\delta_{34}^A,\\ \phi_2^T\chi_1^T =& \left|(q_1q_2)_1^{\bar{3}}(\bar{q}_3\bar{q}_4)_1^{3}\right\rangle_2\delta_{12}^S\delta_{34}^S,\\ \phi_1^T\chi_2^T =& \left|(q_1q_2)_1^6(\bar{q}_3\bar{q}_4)_1^{\bar{6}}\right\rangle_1\delta_{12}^A\delta_{34}^A,\\ \phi_2^T\chi_2^T =& \left|(q_1q_2)_1^{\bar{3}}(\bar{q}_3\bar{q}_4)_1^{3}\right\rangle_1\delta_{12}^S\delta_{34}^S,\\ \phi_1^T\chi_3^T =& \left|(q_1q_2)_1^6(\bar{q}_3\bar{q}_4)_1^{\bar{6}}\right\rangle_0\delta_{12}^A\delta_{34}^A,\\ \phi_2^T\chi_3^T =& \left|(q_1q_2)_1^{\bar{3}}(\bar{q}_3\bar{q}_4)_1^{3}\right\rangle_0\delta_{12}^S\delta_{34}^S,\\ \phi_1^T\chi_4^T =& \left|(q_1q_2)_1^6(\bar{q}_3\bar{q}_4)_0^{\bar{6}}\right\rangle_1\delta_{12}^A\delta_{34}^S,\\ \phi_2^T\chi_4^T =& \left|(q_1q_2)_1^{\bar{3}}(\bar{q}_3\bar{q}_4)_0^{3}\right\rangle_1\delta_{12}^S\delta_{34}^A,\\ \phi_1^T\chi_5^T =& \left|(q_1q_2)_0^6(\bar{q}_3\bar{q}_4)_1^{\bar{6}}\right\rangle_1\delta_{12}^S\delta_{34}^A,\\ \phi_2^T\chi_5^T =& \left|(q_1q_2)_0^{\bar{3}}(\bar{q}_3\bar{q}_4)_1^{3}\right\rangle_1\delta_{12}^A\delta_{34}^S,\\ \phi_1^T\chi_6^T =& \left|(q_1q_2)_0^6(\bar{q}_3\bar{q}_4)_0^{\bar{6}}\right\rangle_0\delta_{12}^S\delta_{34}^S,\\ \phi_2^T\chi_6^T =& \left|(q_1q_2)_0^{\bar{3}}(\bar{q}_3\bar{q}_4)_0^{3}\right\rangle_0\delta_{12}^A\delta_{34}^A.\end{aligned} \quad (30)$$

(30) 式中考虑强子的味道对称性，如果 $q_1q_2$ 满足味道对称性且同位旋为 1 我们用 $\delta_{12}^S$ 来标记，如果同位旋为 0 用 $\delta_{12}^A$ 来标记 ($\delta_{12}^A=1$)，如果 $q_1$ 和 $q_2$ 不满足味道对称性，但满足同位旋对称性则使用 $\delta_{12}^S=\delta_{12}^A=1$。

## 参考文献


[1] CHEN H X, CHEN W, LIU X, et al. Reports on Progress in Physics, 2022, 86(2): 026201.

[2] LIU X. Chinese Science Bulletin, 2014, 59(29): 38153830. DOI: 10.1007/s11434-014-0407-2.

[3] HOSAKA A, IIJIMA T, MIYABAYASHI K, et al. Progress of Theoretical and Experimental Physics, 2016, 2016(6): 062C01.

[4] OSET E, CHEN H X, FEIJOO A, et al. Nuclear Physics A, 2016, 954: 371.

[5] DU M L, ALBALADEJO M, GUO F K, et al. Phys Rev D, 2022, 105: 074018.

[6] ALBUQUERQUE R M, DIAS J M, KHEMCHANDANI K P, et al. Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics, 2019, 46(9): 093002.

[7] VOLOSHIN M B, OKUN L B. JETP Lett, 1976, 23: 333.

[8] DING Z M, JIANG H Y, HE J. Eur Phys J C, 2020, 80(12): 1179. DOI: 10.1140/epjc/s10052-020-08754-6.

[9] LI N, SUN Z F, LIU X, et al. Chin Phys Lett, 2021, 38(9): 092001. DOI: 10.1088/0256-307X/38/9/092001.

[10] AAIJ R, et al. Phys Rev Lett, 2021, 127(8): 082001. DOI: 10.1103/PhysRevLett.127.082001.

[11] MENG L, WANG B, WANG G J, et al. Science Bulletin, 2021, 66(20): 2065. DOI: https://doi.org/10.1016/j.scib.2021.06.026.

[12] CHENG J B, HUANG B L, LIN Z Y, et al. The European Physical

Journal C, 2023, 83(11): 1071. DOI: 10.1140/epjc/s10052-023-12199-y.
[13] PANTELEEVA J Y, PEREVALOVA I A, POLYAKOV M V, et al. Phys Rev C, 2019, 99(4): 045206. DOI: 10.1103/PhysRevC.99.045206.
[14] WANG Z G. Chin Phys C, 2022, 46(10): 103106. DOI: 10.1088/1674-1137/ac7cd7.
[15] WANG Y H, WEI J, AN C S, et al. Chin Phys Lett, 2023, 40(2): 021201. DOI: 10.1088/0256-307X/40/2/021201.
[16] SHI P P, HUANG F, WANG W L. Phys Rev D, 2021, 103(9): 094038. DOI: 10.1103/PhysRevD.103.094038.
[17] CHEN H X, CHEN W, LIU X, et al. Rept Prog Phys, 2023, 86(2): 026201. DOI: 10.1088/1361-6633/aca3b6.
[18] ZHANG W X, XU H, JIA D. Phys Rev D, 2021, 104(11): 114011. DOI: 10.1103/PhysRevD.104.114011.
[19] LIU W N, MA S W, ZHAO X J, et al. Nuclear Physics Review, 2022, 39(3): 296. DOI: 10.11804/NuclPhysRev.39.2022049.
[20] KAIDALOV A B, VOLKOVITSKY P E. Phys Rev Lett, 1992, 69: 3155. DOI: 10.1103/PhysRevLett.69.3155.
[21] DUBYNSKIY S, VOLOSHIN M B. Phys Lett B, 2008, 666: 344. DOI: 10.1016/j.physletb.2008.07.086.
[22] GOTTFRIED K. Phys Rev Lett, 1978, 40: 598. DOI: 10.1103/PhysRevLett.40.598.
[23] ANWAR M N, LU Y, ZOU B S. Phys Rev D, 2017, 95(11): 114031. DOI: 10.1103/PhysRevD.95.114031.
[24] FERRETTI J, SANTOPINTO E, NAEEM ANWAR M, et al. Phys Lett B, 2019, 789: 562. DOI: 10.1016/j.physletb.2018.09.047.
[25] ANWAR M N, FERRETTI J, GUO F K, et al. Eur Phys J C, 2018, 78(8): 647. DOI: 10.1140/epjc/s10052-018-6073-9.
[26] FERRETTI J, SANTOPINTO E. JHEP, 2020, 04: 119. DOI: 10.1007/JHEP04(2020)119.
[27] KUBIS B, HEMMERT T R, MEISSNER U G. Phys Lett B, 1999, 456: 240. DOI: 10.1016/S0370-2693(99)00465-7.
[28] BUCHMANN A J, LEBED R F. Phys Rev D, 2003, 67: 016002. DOI: 10.1103/PhysRevD.67.016002.
[29] LEDWIG T, KIM H C, SILVA A J, et al. Phys Rev D, 2006, 74: 054005. DOI: 10.1103/PhysRevD.74.054005.
[30] JOHNSON K. Acta Phys Polon B, 1975, 6: 865.
[31] WORKMAN R L, et al. PTEP, 2022, 2022: 083C01. DOI: 10.1093/ptep/ptac097.
[32] EIDES M I, PETROV V Y, POLYAKOV M V. Phys Rev D, 2016, 93(5): 054039. DOI: 10.1103/PhysRevD.93.054039.
[33] FEYNMAN R P, LEIGHTON R B, SANDS M. The Feynman Lectures on Physics[M]. Addison-Wesley Pub. Co., 1963.
[34] KARLINER M, ROSNER J L. Phys Rev D, 2014, 90(9): 094007. DOI: 10.1103/PhysRevD.90.094007.
[35] GUO T, LI J N, ZHAO J X, et al. Chin Phys C, 2023, 47(06): 073084. DOI: 10.1088/1674-1137/accb87.
[36] LOEBL E M. Group Theory and its Applications[M]. Academic Press, 1971.

# The mass spectra of the strange hidden-charm and bottom tetraquark under the Hadro-quarkonium and the chromomagentic interaction bag model

LIU Wennian[1, 2], ZHANG Wenxuan[2], MA Shiwen[1], ZHAO Xinjun[1, 2], WANG Liyun[1]

( *1. Xinjiang Laboratory of Phase Transitions and Microstructures in Condensed Matters, College of Physical Science and Technology, Yili Normal University, Yining, Xinjiang, 835000, China;*

*2. Institute of Theoretical Physics, College of Physics and Electronic Engineering, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China* )

**Abstract:** The article calculates the mass spectra of the hidden heavy-flavored tetraquark systems $q\bar{s}Q\bar{Q}$ and $s\bar{s}Q\bar{Q}$ containing strange quarks based on the Hadro-quarkonium(H-Q) model and the chromomagentic interaction(CMI) bag model, respectively.The calculation results of H-Q model show that when the heavy quark even element Q$\bar{Q}$ is in the excited state, the binding energy between the strange meson and Q$\bar{Q}$ is large, which may form a compact structure, so it can be identified experimentally by the decay process from the excited state to the ground state of Q$\bar{Q}$.For the strange hidden heavy taste tetraquark state in the ground state, the calculated results of the CMI bag model support the compact tetraquark state, especially for the experimental $Z_{cs}$(4000) and $Z_{cs}$(4220), the difference between the calculated results is only about 20 MeV, and the calculated results for the mass of $s\bar{s}Q\bar{Q}$ are also very close to some experimental results. Accordingly, we support that some tetraquark states containing strange quarks may have more compact structures.

**Key words:** Hadro-quarkonium ; chromomagentic interaction

---

**Received date:** 07 Feb. 2024;　**Revised date:** 07 Feb. 2024

**Foundation item:** Project supported by the Yili Normal University Foundation, China (Grant No.2022YSYB013 ).

**Corresponding author:** WANG Liyun, E-mail: 1164509653@qq.com